Sur une question d’orthogonalité dans les puissances de courbes elliptiques

Patrice Philippon

Sur une question d'orthogonalité dans les puissances de courbes elliptiques

par Patrice Philippon

Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 7586 du CNRS
Université P. & M. Curie, T.15-25, 4ème ét., F-75252 PARIS cedex 05.

Cette note met à disposition le lemme ci-dessous, utile au travail de S.Checcoli, F.Veneziano & E.Viada, "Torsion anomalous varieties and applications to the effective Mordell-Lang problem" (téléchargeable depuis ArXiv:1204.1435), voir le lemme 7.2 de cette référence. Des propriétés plus profondes d'orthogonalité dans les groupes de Mordell-Weil ont été étudiées par D.Bertrand, "Relations d'orthogonalité sur les groupes de Mordell-Weil", Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1984-85, Progr.Math. 63 (1986), pp.33-39.

Soit E une courbe elliptique définie sur le corps des nombres algébriques $\overline{\mathbf{Q}}$, considéré plongé dans le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$. Soit $K = \mathrm{Frac}(\mathrm{End}(E))$ le corps des multiplications de E, qu'on considérera comme un sous-corps de $\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$. On a $K = \mathbf{Q}$ ou $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-D})$ pour un entier D positif, sans facteur carré.

On suppose E plongée dans un espace projectif par un diviseur ample et symétrique défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et on note $\hat{h} : E\left(\overline{\mathbf{Q}}\right) \to \mathbf{R}$ la hauteur normalisée (*i.e.* de Néron-Tate) correspondante, qui satisfait $\hat{h}(\tau p) = N_{K/\mathbf{Q}}(\tau)\hat{h}(p)$ pour $\tau \in \mathrm{End}(E)$, $p \in E(\overline{\mathbf{Q}})$, et qui ne s'annule qu'aux points de torsion de E. L'accouplement de Néron-Tate associé s'écrit

$$\langle p, q\rangle_{\mathrm{NT}} = \frac{1}{2}\left(\hat{h}(p+q) - \hat{h}(p) - \hat{h}(q)\right) \in \mathbf{R}$$

pour $p, q \in E(\overline{\mathbf{Q}})$, il induit naturellement une forme $\mathbf{Q}$-bilinéaire symétrique sur le K-espace vectoriel $E\left(\overline{\mathbf{Q}}\right) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. On introduit alors le produit scalaire (à valeurs dans $K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$)

$$\langle p, q\rangle = \begin{cases} \langle p, q\rangle_{\mathrm{NT}} & \text{si } K = \mathbf{Q} \\ \langle p, q\rangle_{\mathrm{NT}} - \frac{1}{\sqrt{-D}}\langle p, \sqrt{-D}q\rangle_{\mathrm{NT}} & \text{si } K = \mathbf{Q}(\sqrt{-D}) \end{cases} ,$$

dont on vérifie qu'il est K-sesqui-linéaire (relativement à la conjugaison sur K) et hermitien.

On étend ces produits scalaires à $E\left(\overline{\mathbf{Q}}\right)^n \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ par les formules :

$$\langle p, q\rangle_{\mathrm{NT}} = \sum_{i=1}^{n} \langle p_i, q_i\rangle_{\mathrm{NT}} \quad , \quad \langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle p_i, q_i\rangle \quad ,$$

pour $p = (p_1, \ldots, p_n)$ et $q = (q_1, \ldots, q_n)$ dans $E\left(\overline{\mathbf{Q}}\right)^n$. Et on munit $\mathbf{C}^n$, identifié à l'espace tangent en l'origine de $E(\mathbf{C})^n$, de son produit hermitien standard.

Lemme - *Soit H et H' deux sous-groupes algébriques, connexes, de E^n, alors leurs espaces tangents à l'origine* $\mathrm{T}H(\mathbf{C})$ *et* $\mathrm{T}H'(\mathbf{C})$ *sont orthogonaux dans $\mathbf{C}^n$ si et seulement si $H(\overline{\mathbf{Q}})$ et $H'(\overline{\mathbf{Q}})$ sont orthogonaux dans E^n (pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou de façon équivalente pour l'accouplement de Néron-Tate).*

Démonstration - Soit d et d' les dimensions respectives de H et H', il existe des homomorphismes $\varphi : E^d \to E^n$ et $\varphi' : E^{d'} \to E^n$ dont les images sont H et H' respectivement. On peut décrire ces homomorphismes sous la forme

$$(p_1, \dots, p_d) \longmapsto p = \left(\sum_{j=1}^{d} a_{1,j} p_j, \dots, \sum_{j=1}^{d} a_{n,j} p_j \right)$$
$$(q_1, \dots, q_{d'}) \longmapsto q = \left(\sum_{k=1}^{d'} b_{1,k} q_k, \dots, \sum_{k=1}^{d'} b_{n,k} q_k \right)$$

et les applications tangentes $\mathrm{T}\varphi : \mathbf{C}^d \to \mathrm{T}H(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}^n$ et $\mathrm{T}\varphi' : \mathbf{C}^d \to \mathrm{T}H'(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}^n$ par

$$(u_1, \dots, u_d) \longmapsto u = \left(\sum_{j=1}^{d} a_{1,j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^{d} a_{n,j} u_j \right)$$
$$(v_1, \dots, v_{d'}) \longmapsto v = \left(\sum_{k=1}^{d'} b_{1,k} v_k, \dots, \sum_{k=1}^{d'} b_{n,k} v_k \right)$$

où $a_{i,j}, b_{i,k} \in \mathrm{End}(E)$ pour tous i, j, k. On calcule alors les produits scalaires en développant par sesqui-linéarité

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d'} a_{i,j} u_j \overline{b_{i,k} v_k} = \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d'} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \overline{b_{i,k}} \right) u_j \overline{v_k}$$

et

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d'} a_{i,j} \overline{b_{i,k}} \langle p_j, q_k \rangle = \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d'} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \overline{b_{i,k}} \right) \langle p_j, q_k \rangle \ .$$

Si les espaces tangents en l'origine à H et H' sont orthogonaux (*resp.* si H et H' sont orthogonaux) on a $\langle u, v \rangle = 0$ pour tous $u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_{d'} \in \mathbf{C}$ (*resp.* $\langle p, q \rangle = \langle p, q \rangle_{\mathrm{NT}} = 0$ pour tous $p_1, \dots, p_d, q_1, \dots, q_{d'} \in E(\overline{\mathbf{Q}})$). Appliqué avec $u_{j'} = v_{k'} = 0$ pour $j' \neq j$, $k' \neq k$ et $u_j = v_k = u \neq 0$ (*resp.* $p_{j'} = q_{k'} = 0$ pour $j' \neq j$, $k' \neq k$ et $p_j = q_k = p$ non de torsion), ceci entraîne les égalités $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \overline{b_{i,k}} = 0$, pour tous j, k. Réciproquement, ces dernières entraînent $\langle u, v \rangle = 0$ et $\langle p, q \rangle = \langle p, q \rangle_{\mathrm{NT}} = 0$ pour tous $u \in \mathrm{T}H(\mathbf{C})$, $v \in \mathrm{T}H'(\mathbf{C})$, $p \in H(\overline{\mathbf{Q}})$ et $q \in H'(\overline{\mathbf{Q}})$, ce qui établit l'équivalence énoncée. □